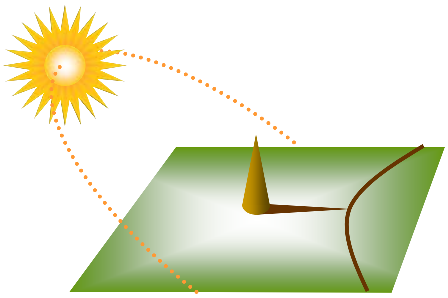
Litt av matematikken bak solur

Anne Bruvold

Revidert mars 2005



Bakgrunn

Min interesse for solur ble vekket da jeg i 2000 skulle holde et lite foredrag om kjeglesnitt og under forberedelsen av dette kom over artikler som koblet kjeglesnitt med solur, nærmere bestemt deklinasjonskurver på urskiva til solur. Dette dokumentet er resultatet etter en tids arbeid for å forstå hvordan solur fungerer gjennom matematikken og fysikken bak horisontale solur.

Nytt i denne versjonen, er formel for timelinjer på sydvendt vertikalt solur.

Tromsø, mars 2005
Anne Bruvold

Innhold

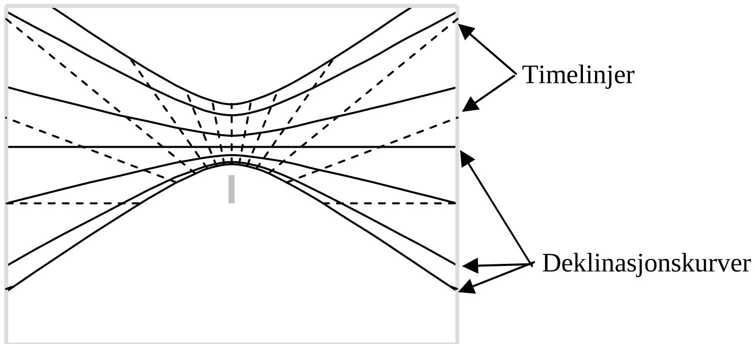
1. Innledning

Jordas rotasjon rundt sin egen akse gir sola en tilsynelatende bevegelse over himmelen fra øst mot vest. Bevegelsen beskriver en sirkel i løpet av et døgn, 360° på 24 timer eller 15° per time. Solur benytter denne bevegelsen til å vise tiden.

Solur består av en viser som, når sola skinner, kaster skygge på en urskive som ikke nødvendigvis er en plan flate. Skyggens posisjon varierer i løpet av døgnet, og for de fleste typer solur varierer også skyggens lengde. Skyggens lengde ved et gitt klokkeslett på dagen varierer også som regel i løpet av året, som resultat av solas varierende deklinasjon (høyde i forhold til himmelekvator).

Vi skal her se nærmere på matematikken bak solur med en plan horisontal urskive, med loddrett og polrettet viser.

2. Nomenklatur



Soluret

Viser: Innretning som kaster skygge på urskiva eller på annen måte markerer tida.

Urskive: Flate med markeringer for avlesning av tida ut fra posisjonen til viserens skygge eller tilsvarende.

Timelinjer: Linjer som markerer skyggens posisjon ved hele timer

Middagstimelinja: Timelinja når sola står i sør. Ligger på linja mellom sør og nord.

Deklinasjonskurve: Kurve som markerer skyggens lengde gjennom et døgn ved en gitt soldeklinasjon. Kurvene merkes gjerne med de stjernetegnene sola befinner seg i ved de markerte deklinasjonene. Disse kurvene kan også kalles datokurver.

Ulike tidsbegrep

Sann soltid: Sann (lokal) soltid er tiden gitt av sola. Sann soltid er 12 når sola står rett i sør. Et soldøgn er tiden fra sola står i nord til den står i nord neste gang, eller med andre ord: tiden mellom to påfølgende nedre kulminasjoner for sola. Lengden av et soldøgn varierer noe i løpet av året, forskjellen på lengste og korteste soldøgn er 51 s.

Middelsoltid: tiden gitt av en tenkt sol, middelsola, som beveger seg med konstant hastighet langs himmelekvator. Lengden av et middelsoldøgn er konstant gjennom året.

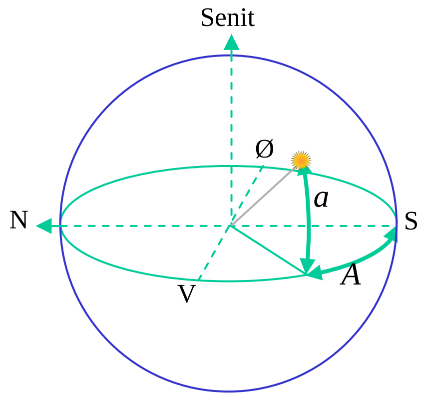
Sann mellomeuropeisk soltid: Sann soltid på 15° øst meridianen, referansemeridianen for mellomeuropeisk tid.

Tidsjevning: Forskjellen mellom sann soltid og middelsoltid.

3. *Størrelser*

Hvilke symboler som brukes for de aktuelle størrelsene, varierer fra forfatter til forfatter. Her følger en oversikt over symbolene i dette dokumentet.

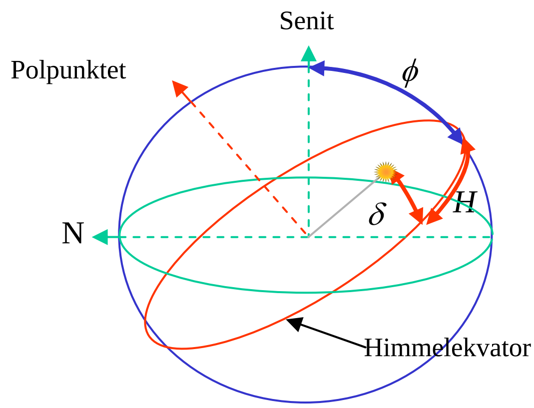
Horisontale koordinater



A Solas asimut, øst-vest posisjonen målt i grader fra sør parallelt med horisonten, positiv vestover (med klokka).

a Solas altitude, høyde over horisonten, målt i grader. (Kan også representere ulike konstanter i noen sammenhenger.)

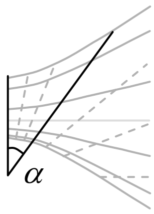
Ekvatoriale koordinater



H Solas timevinkel. Vinkelen fra meridianen til sola, målt i timer eller grader, parallelt med ekvator.
$H = 0°$ kl 12 sann (lokal) soltid,
$H = 15°$ kl 13 sann soltid.

δ Solas deklinasjon, høyden i forhold til himmelekvator, målt i grader.

Andre størrelser

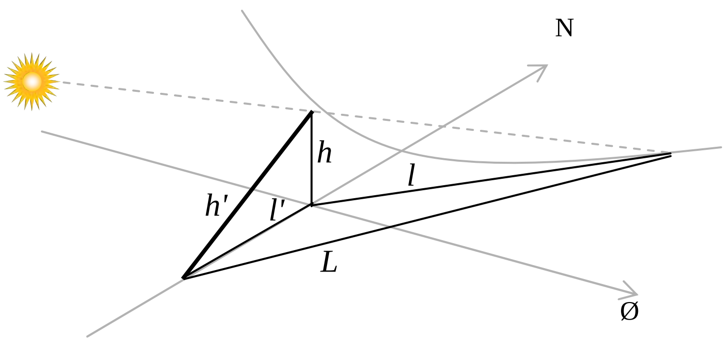


ϕ Nordlig bredde for stedet hvor soluret er.

α Vinkelen mellom en timelinje ved gitt timevinkel H og middagstimelinja.

h avstanden fra viserens topp til horisontalplanet, tilsvarer høyden av loddrett viser.

h' lengden av polrettet viser.



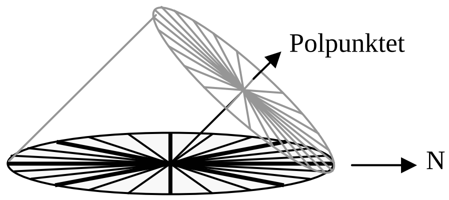
l avstanden fra punktet loddrett under viserens topp og skyggens topp (fotpunktet til loddrett viser).

l' lengden av polrettet viser projisert ned på horisontalplanet.

L Lengden av skyggen av polrettet viser.

4. Utregning av timelinjenes vinkel i forhold til middagstimelinja

Det finnes ulike måter å finne vinkelen til timelinjene i forhold til middagstimelinja. Den tilsynelatende enkleste er å ta utgangspunkt i ekvatoriale solur, hvor urskiva er parallell med himmelekvator, viseren parallell med jordas rotasjonsakse og vinkelrett på urskiva, og timelinjer jevnt fordelt med 15° mellom alle.



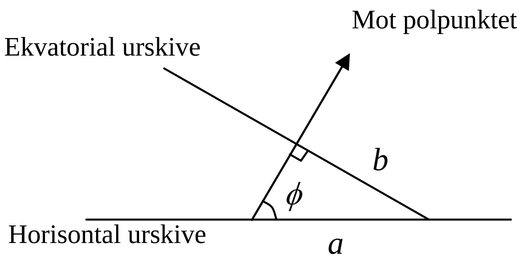
Horisontalt solur med polrettet viser

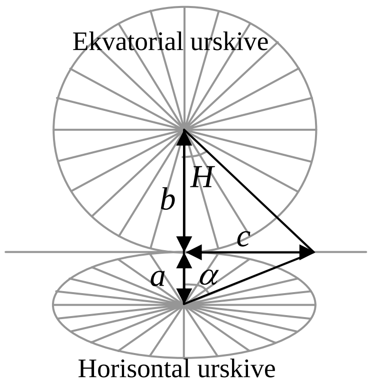
Ved å projisere urskiva til et ekvatorialt solur langs den polrettede viseren for horisontale solur med polrettet viser, og å se på sammenhengen mellom vinkler og sider i ulike trekanter, får vi følgende sammenhenger:

$$\sin\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\tan H = \frac{c}{b}$$

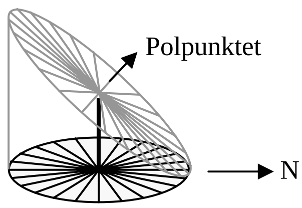
$$\tan\alpha = \frac{c}{a}$$





Ved å kombinere disse, får vi:

(4.1) $\tan\alpha = \sin\phi \tan H$ (polrettet viser)



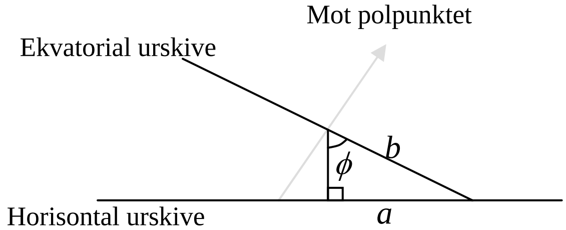
Horisontalt solur med loddrett viser

For horisontale solur med loddrett viser projiserer vi langs den loddrette viseren og får et annet uttrykk for $\sin\phi$:

$$\sin\varphi = \frac{a}{b}$$

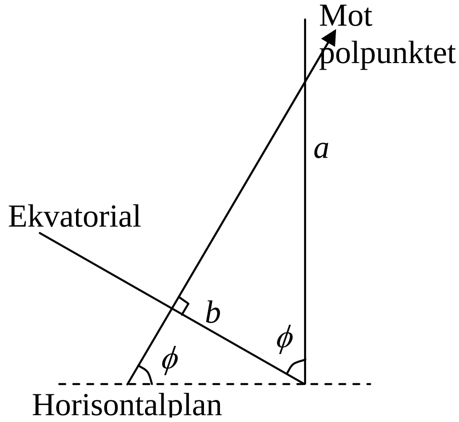
Noe som videre gir et annet uttrykk for $\tan\alpha$:

(4.2) $\tan\alpha = \dfrac{\tan H}{\sin\phi}$ (loddrett viser)



Vertikalt sydvendt solur

Å gjøre beregninger for vertikale solur, er ikke like rett frem som for horisontale solur. Den vertikale flaten soluret er på, kan ha mange forskjellige orienteringer, og flatens orientering har en innvirkning på vinklene for timelinjene. Beregningene for sydvendte vertikale solur, er imidlertid ganske lik beregningene for horisontale solur. Bergningene her gjøres kun for polrettet viser.

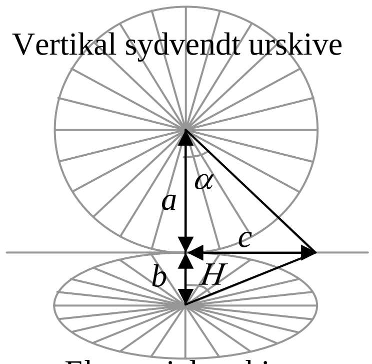


Figurene til høyre viser geometrien i et vertikalt sydvendt solur. Ut fra dette får vi:

$$\cos\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\tan H = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{c}{a}$$



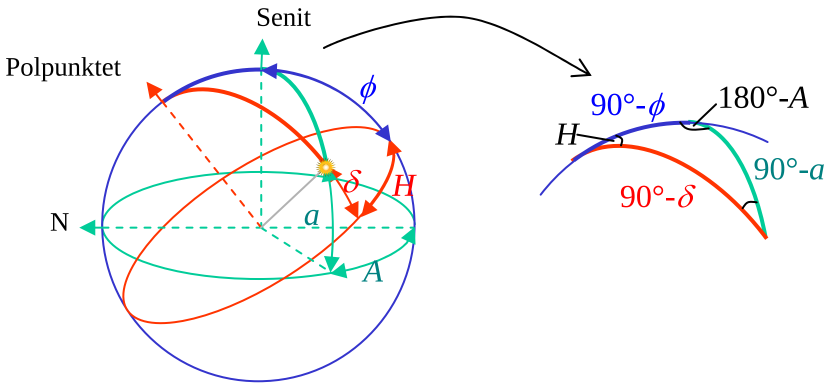
Ved å kombinere disse, får vi:

(4.3) $\tan\alpha = \cos\phi \tan H$ (vertikalt sydvendt viser)

Beregninger ved hjelp av sfærisk geometri

Vi kan ikke helt uten videre gå ut fra at (4.1) og (4.2) stemmer, solas varierende deklinasjon kan skape komplikasjoner. Ved hjelp av beregninger med utgangspunkt i sfærisk geometri, kan vi få bekreftet/avkreftet om (4.1) og (4.2) kan brukes.

Først identifiserer vi en trekant som kan brukes til å sette opp sammenhengen mellom solas timevinkel H og solas høyde over horisonten a. Dette settes inn i cosinussetninga fra sfærisk geometri:



$$\cos(90° - a) = \cos(90° - \phi)\cos(90° - \delta) + \sin(90° - \phi)\sin(90° - \delta)\cos H$$

som gir

(4.4) $\sin a = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H$

Bruker så "four-parts" formelen for å finne sammenhengen mellom timevinkelen H og asimut A:

$$\cos(90° - \phi)\cos H = \sin(90° - \phi)\cot(90° - \delta) - \sin H \cot(180° - A)$$

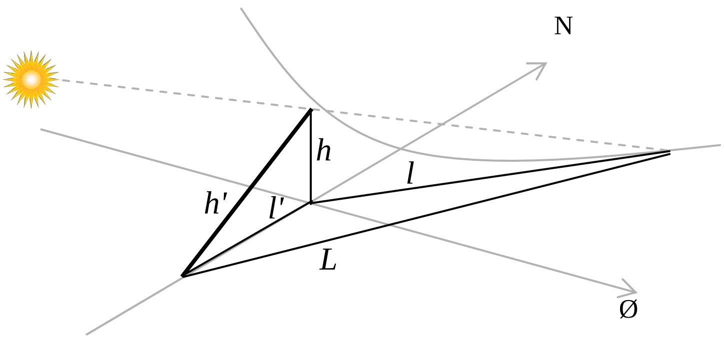
som gir

$$\tan A = \frac{\sin H}{\sin\phi\cos H - \cos\phi\tan\delta} \quad (4.5)$$

A gir vinkelen mellom middagstimelinja og en linje fra punktet loddrett under viserens toppunkt og toppen av viserens skygge. For horisontale solur med loddrett viser er dette det samme som vinkelen for timelinja for et gitt tidspunkt. Vi ser at vinkelen er avhengig av solas deklinasjon, og dermed varierende gjennom året. Kun når $\delta = 0°$, ved jevndøgnene, stemmer (4.2). Projeksjonsmetoden som ga oss likning (4.2) er derfor ikke holdbar for ur med loddrette visere.

For polrettede visere, finner vi timelinjas vinkel ved først å finne avstanden l mellom punktet loddrett under viserens topp og skyggens topp:

$$l = \frac{h}{\tan a} \quad (4.6)$$



hvor h er avstanden fra viserens topp til horisontalplanet. Videre er lengden av viseren projisert på horisontalplanet gitt ved:

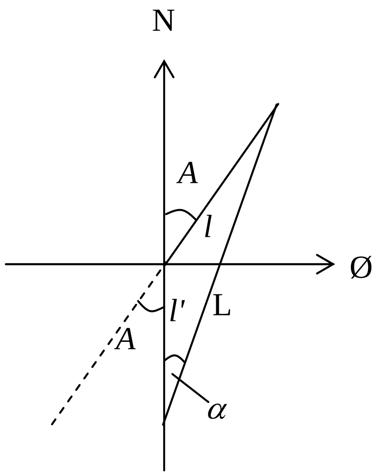
$$l' = \frac{h}{\tan\phi}$$

Ved å bruke sinussetninga to ganger i trekanten gitt ved l, l' og L, hvor L er avstanden fra fotpunktet til viseren og toppen av skyggen, får vi:

$$L = l\frac{\sin A}{\sin\alpha} \quad (4.7)$$

og

$$L = l'\frac{\sin(180 - A)}{\sin(A - \alpha)} = l'\frac{\sin A}{\sin A\cos\alpha - \cos A\sin\alpha}$$



Får da videre:

$$l\frac{\sin A}{\sin\alpha} = l'\frac{\sin A}{\sin A\cos\alpha - \cos A\sin\alpha}$$

som gir

(4.8) $\tan\alpha = \dfrac{l\sin A}{l' + l\cos A}$

$\sin A$ finner vi ved bruk av sinussetninga for sfærisk geometri:

$$\frac{\sin H}{\sin(180° - A)} = \frac{\sin(90° - a)}{\sin(90° - \delta)}$$

som gir

(4.9) $\sin A = \dfrac{\sin H\cos\delta}{\cos a}$

$\cos A$ finner vi nå ved hjelp av $\tan A$ og $\sin A$:

$$\cos A = \frac{\dfrac{\sin H\cos\delta}{\cos a}}{\left(\dfrac{\sin H}{\sin\phi\cos H - \cos\phi\tan\delta}\right)}$$

som gir

(4.10) $\cos A = \dfrac{\cos\delta(\sin\phi\cos H - \cos\phi\tan\delta)}{\cos a}$

Setter vi inn (4.9) og (4.10) samt uttrykkene for l og l', i (4.8), får vi:

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{h}{\tan a}\dfrac{\sin H\cos\delta}{\cos a}}{\dfrac{h}{\tan\phi} + \dfrac{h}{\tan a}\dfrac{\cos\delta(\sin\phi\cos H - \cos\phi\tan\delta)}{\cos a}}$$
$$= \frac{\sin H\cos\delta\tan\phi}{\sin a + \cos\delta\tan\phi(\sin\phi\cos H - \cos\phi\tan\delta)}$$

Setter inn for $\sin a$ fra (4.4) og får

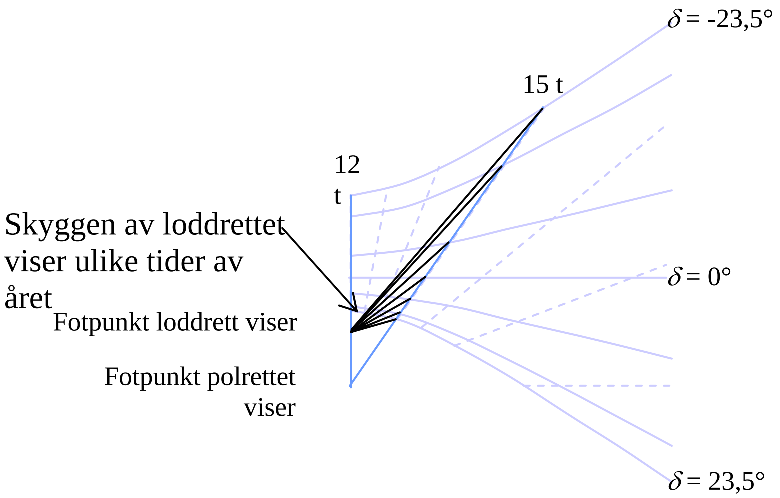
$$\tan\alpha = \frac{\sin H\cos\delta\tan\phi}{\sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H + \cos\delta\tan\phi\sin\phi\cos H - \sin\phi\sin\delta}$$
$$= \tan H\,\frac{\tan\phi}{\dfrac{\cos^2\phi + \sin^2\phi}{\cos\phi}}$$

En siste forenkling gir

$$\tan\alpha = \tan H\sin\phi$$

Dette stemmer med resultatet (4.1) ved projeksjon langs den polrettede viseren. For horisontale solur med polrettet viser, er vinkelen mellom timelinjene og middagstimelinja kun avhengig av solas timevinkel og stedets nordlige bredde. En timelinje på et horisontalt solur med polrettet viser vil derfor være gyldig hele året.

Figuren under viser hvordan timelinjene for kl 15 sann soltid ved 45° nord for et solur med loddrett viser varierer gjennom året (sorte linjer). De blå heltrukne linjene markerer timelinja for kl 12 sann soltid (felles for loddrett og polrettet viser) og kl 15 sann soltid for polrettet viser, mens de sorte heltrukne linjene markerer de ulike timelinjene kl 15 sann soltid for en loddrett viser.



5. Timevinkel ved solnedgang

Nord for polarsirkelen hvor det er midnattssol om sommeren, kan soluret brukes hele døgnet deler av året. Vi har derfor bruk for timelinjer for alle døgnets 24 timer. Sør for polarsirkelen kan man utelate timelinjer for de timene hvor sola er under horisonten.

For å finne hvilke timelinjer vi kan utelate, trenger vi timevinkelen for nordligste solnedgang. Timevinkelen ved solnedgang finner vi ved å ta utgangspunkt i formel (4.4) og sette høyden $a = 0°$. Med litt omregning får vi:

$$\cos H = -\tan\phi \tan\delta$$

Ved å sette inn $\delta = 23{,}5°$ for sommersolverv og nordligste solnedgang, og ønsket breddegrad ϕ finner vi timevinkelen for nordligste solnedgang. Tabellen under viser timevinkelen og tilhørende klokkeslett for nordligste solnedgang for utvalgte breddegrader.

Breddegrad	Timevinkel for nordligste solnedgang	Klokkeslett ved seneste solnedgang (desimaler av sann soltid)
75	Midnattssol	Midnattssol
70	Midnattssol	Midnattssol
65	159	22,6
60	139	21,3
55	128	20,6

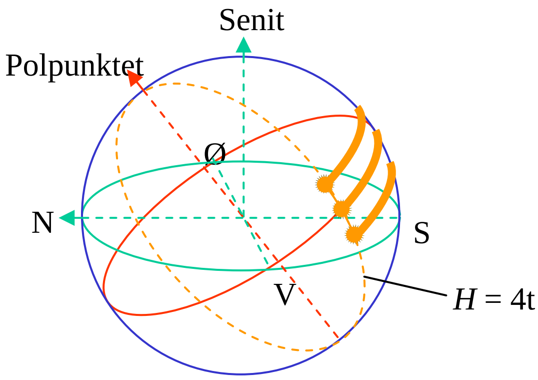
Strengt tatt er solhøyden negativ når vi ser solen gå ned. Dette kommer av at sollyset bøyes i jordas atmosfære, en effekt som kalles refraksjon. Denne effekten gjør at sola går ned senere enn den ville gjort ut fra rent geometriske hensyn. Refraksjonen varierer med høyden over horisonten og med lufttrykk og temperatur. Solas høyde under horisonten ved solnedgang kan derfor variere fra dag til dag, alt etter værforholdene og er derfor vanskelig å ta med i tabellene.

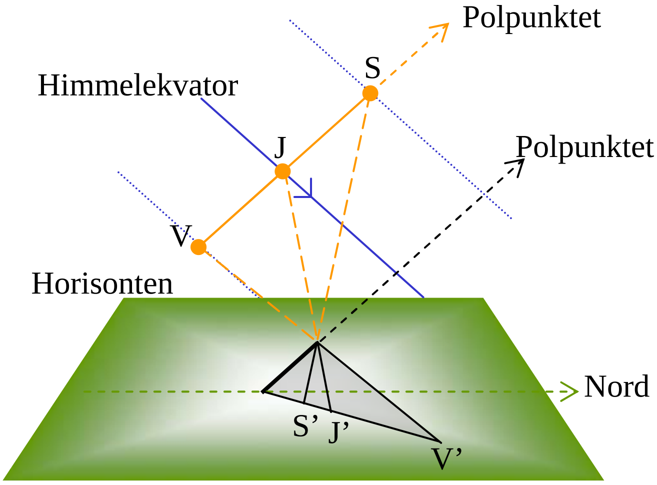
Tillegget for atmosfærisk refraksjon er størst ved solvervene, og blir større jo nærmere polene man kommer. Tar man hensyn til kun refraksjonen kommer solnedgangen rundt en halv time senere ved 70 grader nord. Tar man i tillegg hensyn til solas diameter, forsinkes solnedgangen med nærmere en time ved de tidspunktene hvor sola kommer tilbake etter mørketida.

6. *Mer om horisontale solur med loddrett viser*

Som vist i likning (4.5) gir projeksjonsmetoden som ga likning (4.2) feil i tidsavlesninga for loddrette visere. Denne feilen er en effekt av solas varierende deklinasjon gjennom året, og vinkelen mellom himmelekvator og horisonten.

Ved et gitt klokkeslett i sann soltid, har sola samme timevinkel uavhengig av deklinasjon. Hvis vi ser på solas posisjon kl 16 sann soltid gjennom året, vil sola beskrive et buesegment på 2 ganger 23,5° av en storsirkel som går fra pol til pol.

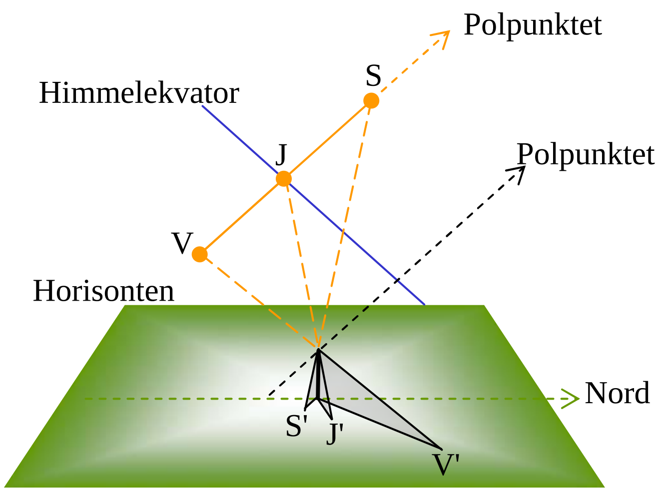


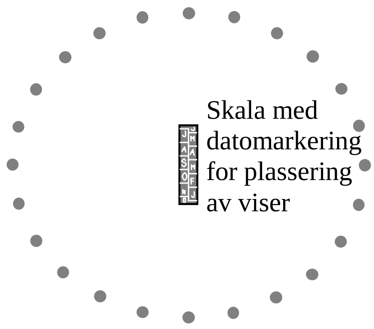


Viseren til et solur med polrettet viser ligger på aksen mellom himmelpolene, noe som videre gjør at viseren ligger i planet til nevnte storsirkel. Siden storsirkelen definert av solas posisjon ved et gitt klokkeslett i sann soltid og viseren ligger i samme plan, vil også skyggen av viseren ligge i dette planet. Dette betyr igjen at vinkelen mellom en gitt timelinje for solur med polrettet viser har samme vinkel med middagstimelinja hele året. Dette er illustrert i figuren til venstre. V, J og S markerer solas posisjon ved henholdsvis vintersolverv, jevndøgnene og sommersolverv. V', J' og S' viser de tilsvarende toppunktene for skyggen. Linja fra viserens fotpunkt til V', tilsvarer timelinja for tidspunktet.

En loddrett viser ligger ikke i planet til storsirkelen definert av solas av solas posisjon ved et gitt klokkeslett i sann soltid, med mindre klokkeslettet er 12 eller 24, eller soluret står på en av polene. Skyggen ligger derfor heller ikke i dette planet. Solas varierende deklinasjon gir dermed skyggen varierende vinkel i forhold til middagslinja gjennom året.

Feilen minker med økende nordlig bredde; på nordpolen er horisontale solur med loddrett og polrettet viser og ekvatoriale solur like.





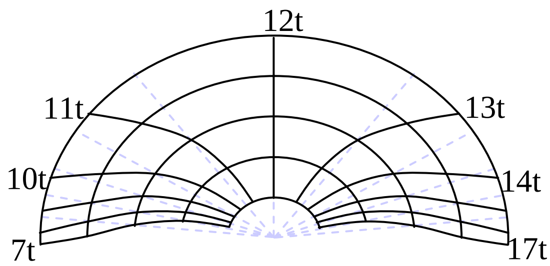
Analemmatiske solur

Problemet med at vinkelen mellom middagstimelinja og skyggen av en loddrett viser ikke er den samme gjennom året, kan løses på ulike måter. En er å lage solur hvor viseren flyttes gjennom året, slik som gjøres i analemmatiske solur. I analemmatiske solur markeres timene ved punkter lagt ut på en ellipse i et bestemt mønster. Viseren flyttes langs ellipsens lille akse etter tiden på året. Dette korrigerer for timelinjevinkelens avhengighet av solas deklinasjon.

Asimut solur

En annen måte å korrigere et solur med loddrett viser, er å lage urskiven slik at man leser av tiden på ulike skalaer ulike tider på året. Denne typen solur kalles horisontale asimut ur eller horisontale altitude ur etter om det er solas asimut eller altitude som leses av. Denne typen horisontale solur finnes gjerne på reisesolur sammen med solur med polrettet viser. Slike reisesolur med to typer solur kan stilles inn uten å kjenne til hvilken retning som er nord, man må bare vite datoen og justere soluret slik at begge solurene viser samme tid

Figuren til høyre viser skisse av urskiva for et asimut ur for bruk ved 45° nord. Sirkelbuene viser hvor man leser av tiden ved ulike deklinasjoner/datoer. Den inneste buen tilsvarer vintersolverv og den ytterste sommersolverv. Det er her tatt med timekurver for tiden mellom 07 og 17. Normalt vil soluret inneholde linjer for alle timene hvor sola er oppe. De stiplede lilla linjene viser timelinjene dersom man ikke justerer for solas deklinasjon.



EarthDial typen

En tredje måte er brukt i prosjektet EarthDial hvor man vil ha solur av samme type plassert rundt på jorda. Her har man brukt en loddrett viser på en urskive med timelinjer laget for en polrettet viser. Den loddrette viseren er plassert slik at toppen faller sammen med toppen av den polrettede viseren soluret er konstruert for, og fotpunktet loddrett under toppen. For å lese av tiden med et slikt solur, må skyggen av toppen av viseren vises på urskiva.

7. *Fra solur tid til klokketid*

Hvis man lager et horisontalt solur med polrettet viser, vil timelinjer gitt av (4.1) gi rett tid i forhold til sann soltid. Sammenlikner man imidlertid tida soluret viser med for eksempel et armbåndsur som viser norsk normaltid, vil urene som regel vise ulik tid.

En av årsakene til forskjellen, er at norsk normaltid tar utgangspunkt i sann mellomeuropeisk soltid, sann soltid ved meridianen 15° øst for Greenwich. Det meste av Norge ligger utenfor denne meridianen og vil ha en annen sann soltid. Dette kan vi imidlertid korrigere for ved å legge til eller trekke en konstant fra solas timevinkel ved beregning av timelinjenes vinkel. Denne konstanten er avhengig av stedets lengdegrad. Middagstimelinja og linja for kl 12 vil med denne korreksjonen ikke lengre være den samme.

Selv om vi korrigerer for stedets lengdegrad vil soluret fortsatt avvike fra norsk normaltid mesteparten av året. Dette kan korrigeres ved å legge til eller trekke fra tiden gitt av tidsjevninga Dette skal vi se på senere, først skal vi se nærmere på de ulike tidsbegrepene og sammenhengene mellom dem.

Sann soltid

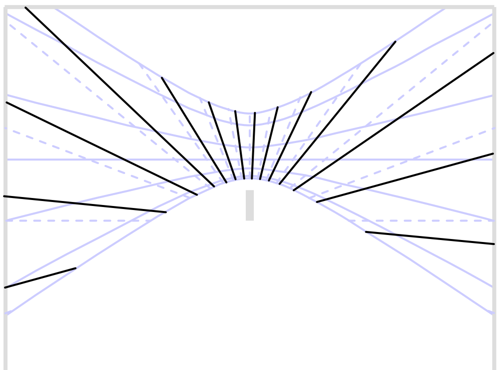
Sann (lokal) soltid er tiden gitt av sola. Sann soltid er 12 når sola står i sør. Et soldøgn er tiden fra sola står i nord (såkalt nedre kulminasjon) til den står i nord neste gang.

Ser man på tiden mellom to påfølgende ganger sola står i nord ved ulike tider av året (eller tilsvarende for sør), vil man finne små variasjoner. Forskjellen på lengste og korteste soldøgn er 51 sekunder, litt over 2 sekunder per time. I utgangspunktet er ikke dette mye når man tenker på at ett døgn inneholder 86 400 sekunder, men flere for korte soldøgn på rad gjør at sola står stadig tidligere i sør i forhold til normaltid. Gjennom året gjør påfølgende for korte eller for lange soldøgn at sola er opp til 16 minutter for tidlig eller sen i forhold til normaltid.

Sann mellomeuropeisk soltid

Første trinn i overgangen fra sann soltid til norsk normaltid, er fra sann soltid til sann mellomeuropeisk soltid. Denne er som nevnt sann soltid for meridianen 15° øst for Greenwich, referansemeridianen for mellomeuropeisk tid. Solur stilt inn etter sann lokal soltid viser for mye dersom de er øst for 15° øst og for lite om de er vest for 15° øst.

Lengdedifferansen er et steds østlige eller vestlige posisjon i forhold til 15° øst målt i grader. Tromsø ligger på 18° 57' øst. Lengdedifferansen for Tromsø er dermed 3° 57', eller 16 minutter om vi måler i tid. Dersom lengdedifferansen er mer enn 7° 30', som for Vardø på 31°7' øst, skulle stedet egentlig ligge i en annen tidssone. Siden det er upraktisk med ulike tidssoner i ett land, danner landegrensene som regel grensen mellom tidssonene i stedet for lengdegradene.



Solur kan justeres slik at de viser sann mellomeuropeisk soltid i utgangspunktet. Horisontale og vertikale solur med polrettet viser og varianter av disse, må justeres til sann mellomeuropeisk soltid ved konstruksjon. Ved beregning av vinkelen for timelinjene justeres solas timevinkel etter stedets lengde. For steder øst for 15° øst, legges lengdedifferansen til timevinkelen, og for steder vest for 15° øst, trekkes lengdedifferansen fra. Figuren viser timelinjer justert for et sted 4° øst for meridianen som danner grunnlaget for sonetida, for eksempel et sted på 19° øst som følger mellomeuropeisk tid. Sorte heltrukne linjer er justerte timer, mens lilla stiplede linjer er sann lokal soltid.

Middelsoltid og tidsjevninga

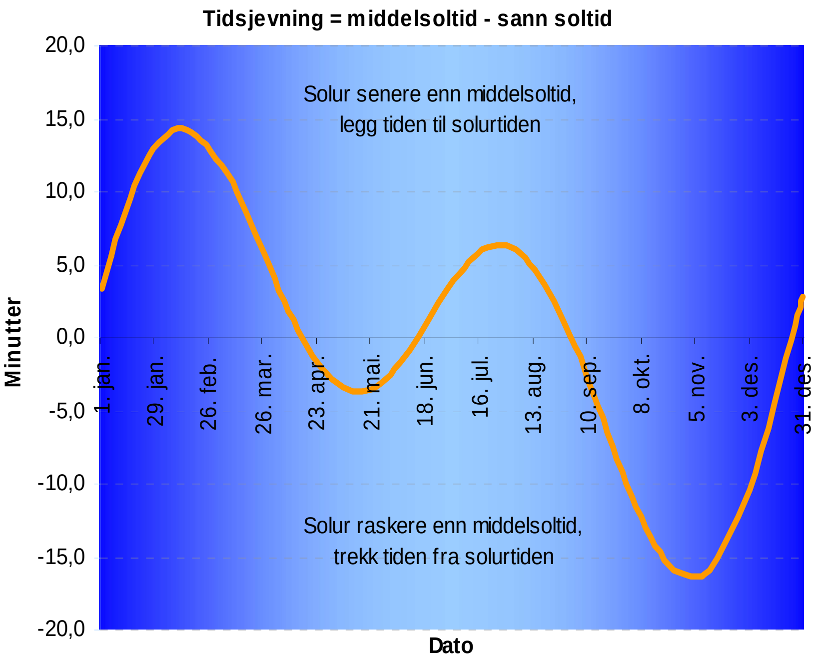
Jordas rotasjon rundt sin akse gir sola en tilsynelatende vestlig bevegelse på himmelen. Jordas bevegelse i bane rundt sola gir sola en tilsynelatende østlig bevegelse. Solas bevegelse over himmelen gjennom et døgn, er summen av disse to bevegelsene.

Jordbanens ellipseform gjør at jordas bevegelse i banen er ujevn og gir små variasjoner i solas østlige bevegelse. I tillegg kommer variasjoner forårsaket av jordaksene helning. Dette er årsaken til at soldøgnet har ulik lengde gjennom året. Soldøgnet er lengst sommer og vinter - i nærheten av solvervene, og kortest vår og høst - i nærheten av jevndøgnene.

For å unngå problemene med ulik lengde på soldøgnet, er det laget en tenkt sol kalt middelsol som beveger seg med konstant fart langs himmelekvator. Middelsola danner grunnlag for middelsoltida på samme måte som sola danner grunnlag for sann soltid. Middelsola kommer fram på følgende måte:

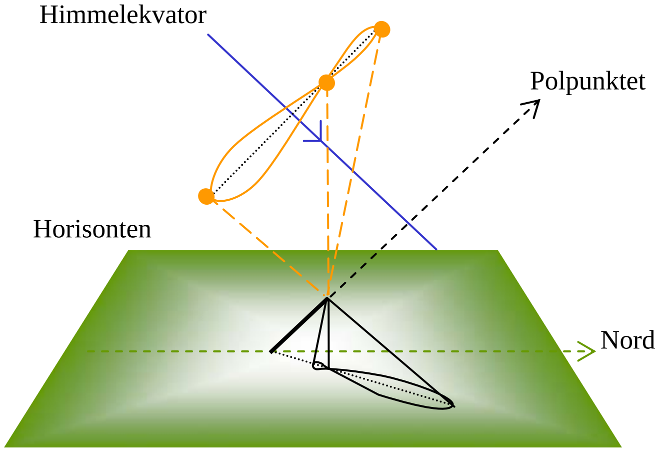
> En dynamisk middelsol starter samtidig med den virkelige sola når jorda er i perihel (nærmest sola), følger ekliptikken med konstant fart og kommer tilbake til perihel samtidig som sola.
>
> Middelsola starter sammen med den dynamiske middelsola i vårjevndøgnspunktet, går med konstant fart langs ekvator og kommer tilbake til vårjevndøgnspunktet samtidig med den dynamiske middelsola.

Differansen mellom middelsoltid og sann soltid kalles tidsjevninga. Tidsjevninga finnes i form av grafer eller tabeller som en kan bruke for å finne ut hvor mange minutter man må legge til eller trekke fra soluret for å få middelsoltid ut fra sann soltid. Har man et solur som er justert til sann mellomeuropeisk soltid, vil man ved å bruke tidsjevninga få normaltid. Det siste man evt må gjøre, er å legge til en time for sommertida.



Når man justerer for tidsjevninga må man passe på hvordan tabellen eller grafen er satt opp. Noen bruker *tidsjevning = sann soltid - middelsoltid*, andre bruker *tidsjevning = middelsoltid - sann soltid*.

En forholdsvis kjent effekt av tidsjevninga er analemmaen, en 8-talls figur som kommer fram dersom man markerer solas posisjon ved samme tidspunkt i normaltid gjennom året. (Det er ikke noen direkte sammenheng mellom analemmaen og analemmatiske solur). For å justere et horisontalt solur med polrettet viser for tidsjevninga, kan man tegne inn projeksjonen av analemmaen på timelinjene.



Normalt brukes midlere verdier for tidsjevninga, men skal man ha spesielt nøyaktige solur, som heliokronometrene som ble brukt fram til 1900 for å justere jernbaneurene i Frankrike, må man beregne tidsjevninga for hvert år.

I tillegg til at jordaksen heller og jorda går i ellipseformet bane rundt sola, så går jorda sammen med månen rundt jord-månesystemets tyngdepunkt. Dette fører til en ytterligere ujevn fart i jordas gang rundt sola og i solas østlige bevegelse over himmelen. Til slutt kommer det at året og døgnet ikke går opp i hverandre, noe som gjør at vi må sette inn skuddager for å holde året og kalenderen i takt med hverandre. Dette må det tas hensyn til om vi skal beregne tidsjevninga med stor nøyaktighet.

Normaltid (sonetid)

For å få norsk normaltid fra et solur må man justere tiden ut fra solurets posisjon i forhold til meridianen på 15° øst. Dette gjøres enten ved å justere soluret som beskrevet over, eller legge til eller trekke fra lengdedifferansen omregnet fra grader til timer og minutter. Deretter må man legge til eller trekke fra tidsjevninga, som vist i dette eksempelet:

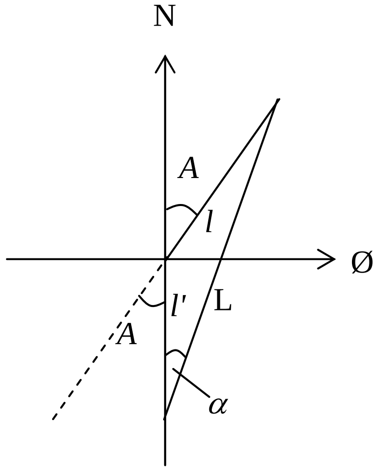
> Lengdedifferansen for Tromsø er 3° 57' eller 3,95°. Omregnet til timer (15° = 1 time) blir dette 0,2633 timer eller 16 minutter. Når et solur i Tromsø (eller andre steder på samme lengdegrad) viser 11.00 sann soltid, er sann mellomeuropeisk soltid 16 minutter på 11 eller 10.44.
>
> 1. mai er tidsjevninga (sann soltid - middelsoltid) cirka +3 minutter. Soluret i Tromsø som 1. mai viser 11.00 sann soltid eller 10.44 sann middeleuropeisk soltid, viser 10.41 normaltid. Siden vi bruker sommertid i Norge, vil mekaniske klokker som armbåndsur og lignende vise 11.41.

Vil man sjekke om man har regnet rett, kan man gjøre beregningene for kl 12 sann soltid og sjekke om man har regnet rett ved å sjekke ved hvilket tidspunkt normaltid sola står i sør. Dette kan sjekkes ved å slå opp i Almanakk for Norge og gjøre beregningene som er beskrevet der.

8. *Utregning av deklinasjonskurver med utgangspunkt i sfærisk trigonometri*

Deklinasjonskurvene tegnes av toppen av viserens skygge, og kan beregnes på samme måte for solur med polrettet og loddrett viser. Det eneste vi trenger å vite er hvor høyt over bakken viserens topp befinner seg. Hvordan man tegner deklinasjonskurvene avhenger av hvordan man lager urskiva, ved tegning for hånd eller ved plotting i et koordinatsystem.

Avstand fra fotpunkt målt langs timelinja



En måte å tegne deklinasjonslinja, er å måle avstanden fra fotpunktet til en polrettet viser, langs timelinjene. Denne metoden er greiest å bruke når man tegner urskiva for hånd.

Avstanden L fra fotpunktet til polrettet viser, finnes ved å sette likning (4.6) inn i likning (4.7):

$$L = \frac{h \sin A}{\tan a \sin \alpha}$$

Ved å sette erstatte sin A ved å bruke (4.7) får vi:

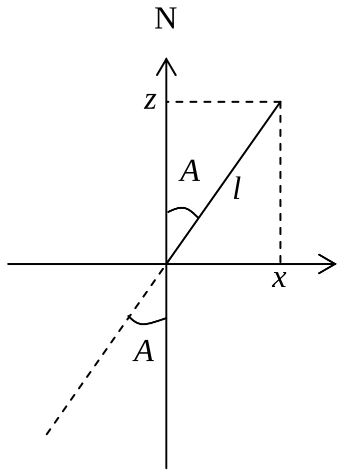
$$L = \frac{h \sin H \cos \delta}{\sin a \sin \alpha}$$

Videre får vi ved å erstatte sin a ved (4.4) får vi:

(8.1) $$L = \frac{h \sin H}{(\sin \phi \tan \delta + \cos \phi \cos H) \sin \alpha}$$

Ved å velge deklinasjon ut fra årstid og aktuelle timevinkler for årstiden, vil man få avstanden fra fotpunktet til deklinasjonskurven for denne årstiden.

Kurver i koordinatsystem



Hvis man skal tegne grafen til deklinasjonskurvene på urskiva, kan det være greit å bruke et rettvinklet koordinatsystem. Her bruker vi *x* og *z* for å ha samme koordinater som brukt i beregningene basert på kjeglesnitt i kapittel 9. Origo for koordinatsystemet er loddrett under viserens topp, *x* er positiv mot øst og *z* er positiv mot nord.

Koordinatene er gitt ved:

$$x = l \sin A = h \frac{\sin H \cos \delta}{\sin a} \quad \text{og} \quad z = l \cos A = h \frac{\cos \delta (\sin \phi \cos H - \cos \phi \tan \delta)}{\sin a}$$

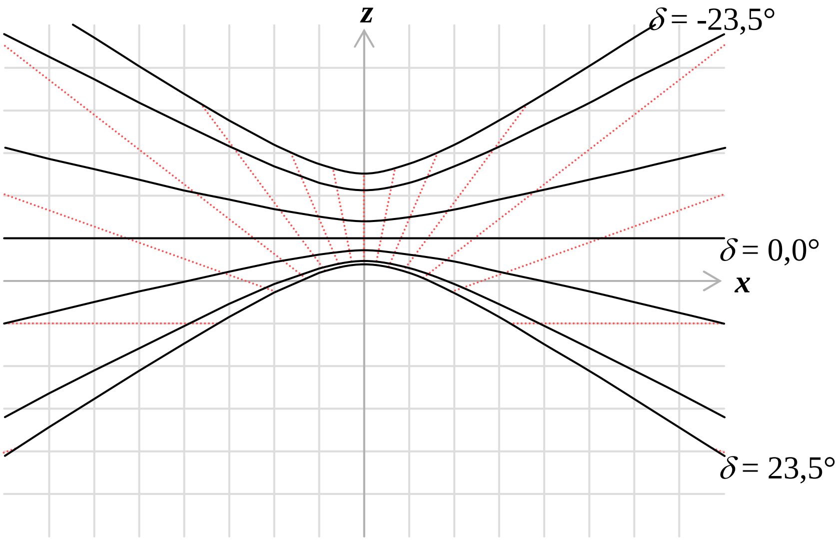
Setter inn for sin *a* fra (4.4) og velger viserlengde slik at *h* = 1 og får

(8.2) $$x = \frac{\sin H}{\sin\phi\tan\delta + \cos\phi\cos H}$$

og

(8.3) $$z = \frac{\tan\phi\cos H - \tan\delta}{\tan\phi\tan\delta + \cos H}$$

Dette gir oss grafer som på figuren under. Timelinjene kommer automatisk fram ved å trekke en linje mellom punkter som kommer fra samme timevinkel men ulik deklinasjon. Eksempelet er for 45° nord.

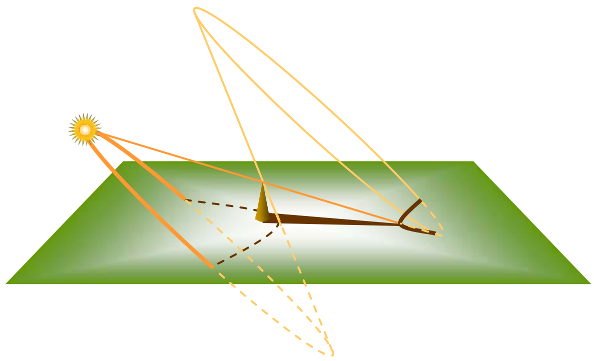


Grafer basert på (8.2) og (8.3) gir samme kurve som grafer basert på kjeglesnittmetoden i kapittel 9. Fordelen med å ta utgangspunkt i sfærisk geometri er at vi får ut timelinjene automatisk og at vi lett kan justere for lengdegraden slik at vi lage solur som viser sann mellomeuropeisk soltid.

9. Utregning av deklinasjonskurver ved bruk av kjeglesnitt.

Dette kapittelet presenterer en lite praktisk fremgangsmåte, men tas likevel med da det tar for seg kjeglesnitt som er årsaken til at jeg oppdaget solurenes fascinerende verden.

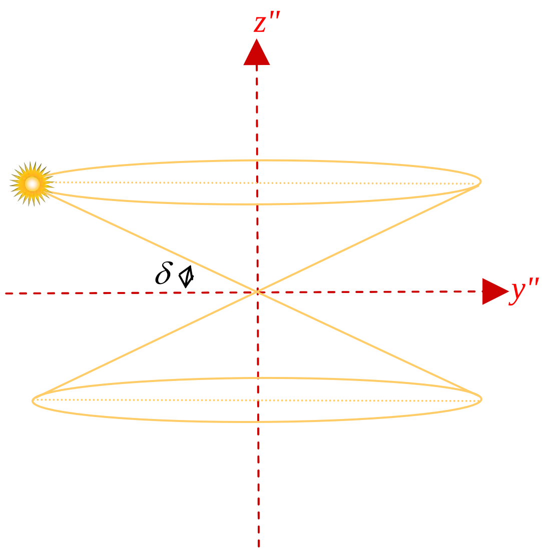
Hvis vi tar utgangspunkt i et horisontalt solur med polrettet eller loddrett viser, vil solstålene tegne en dobbelkjegle i løpet av et døgn, med toppunkt i viserens topp. Aksen til dobbelkjeglen peker mot himmelens nordpol. Dobbeltkjeglen snittes av horisontalplanet (urskiva) slik at toppen av viserens skygge beskriver en kurve formet som et kjeglesnitt i løpet av døgnet. Deklinasjonskurvene i solur med horisontal urskive (og alle med plan urskive) er med andre ord formet som kjeglesnitt.



Vi skal nå se på hvordan vi kan bruke teorien fra kjeglesnitt for å beregne deklinasjonskurvene. Med et koordinatsystem x'', y'', z'', hvor z'' er dobbelkjeglens akse, og x'' peker mot øst, parallelt med horisontalplanet, vil kjegles flate beskrives av formelen

$$x''^2 + y''^2 = k^2 z''^2$$

hvor $k^2 = \dfrac{1}{\tan^2 \delta}$ og $\delta \in \langle 0°, 23{,}5°]$ er solas deklinasjon. Deklinasjonen varierer egentlig mellom -23,5° og 23,5°, men positive og negative verdier vil gi sammenfallende løsninger. $\delta = 0°$ gir ingen kjegle og vil bli behandlet i eget punkt senere. Her konsentrerer vi oss om de positive verdiene.



Et koordinatsystem x', y', z', er rotert en vinkel ϕ i forhold til x'', y'', z'', slik at z' er parallell med horisontalplanet og peker mot nord, y' loddrett ned i bakken og x' parallell med x''.

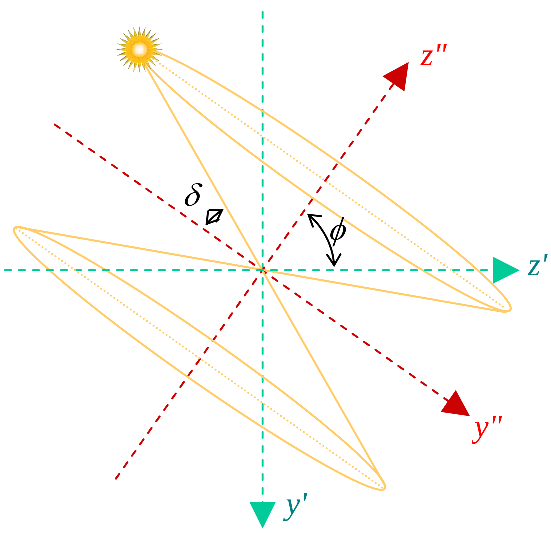
Transformasjonen kan beskrives med følgende likninger:

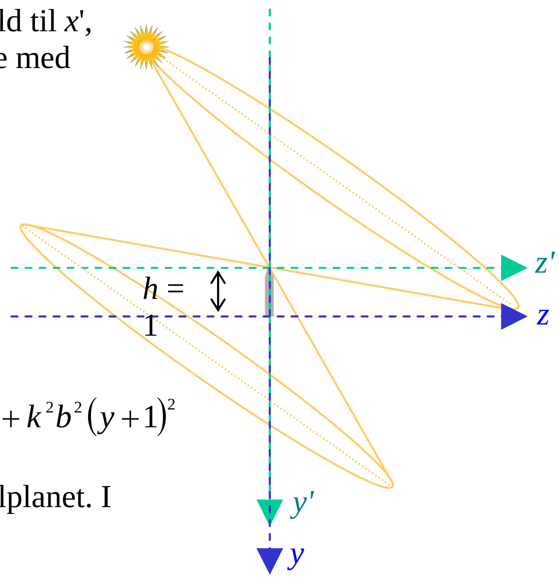
$$x'' = x'$$
$$y'' = ay' + bz'$$
$$z'' = az' - by'$$

hvor $a = \cos\phi$, $b = \sin\phi$ og $\phi \in [0°, 90°]$ er stedets nordlige bredde.

Kjegleformelen blir med denne transformasjonen slik:

$$x'^2 + a^2 y'^2 + 2aby'z' + b^2 z'^2 = k^2 a^2 z'^2 - 2k^2 aby'z' + k^2 b^2 y'^2$$





Et tredje koordinatsystem *x*, *y*, *z* er parallellforskjøvet i forhold til *x*', *y*', *z*', slik at *xz*-planet ligger i horisontalplanet. Med en stolpe med høyde 1, får vi følgende transformasjon:

$$x' = x$$
$$y' = y + 1$$
$$z' = z$$

og følgende kjegleformel:

$$x^2 + a^2(y+1)^2 + 2abz(y+1) + b^2z^2 = k^2a^2z^2 - 2k^2abz(y+1) + k^2b^2(y+1)^2$$

Deklinasjonskurven er skjæringa mellom kjegla og horisontalplanet. I horisontalplanet er $y = 0$, noe som gir oss:

(7.1) $\left(k^2a^2 - b^2\right)z^2 - 2ab\left(k^2+1\right)z + k^2b^2 - a^2 - x^2 = 0$

Skyggen som toppen av staven tegner kan sees som en funksjon *z*(*x*). Likningen over løses derfor med hensyn på *z* og vi får:

(7.2) $z = \dfrac{+ab\left(k^2+1\right) \pm \sqrt{a^2b^2\left(k^2+1\right)^2 - \left(k^2a^2 - b^2\right)\left(k^2b^2 - a^2 - x^2\right)}}{\left(k^2a^2 - b^2\right)}$

Grafen til *z*(*x*) tilsvarer skygen av toppen av en stolpe med høyde 1, plassert i origo i et koordinatsystem hvor positiv *x* er mot øst og positiv *z* er mot nord. *z*(*x*) er deklinasjonskurven ved en gitt deklinasjon.

Betraktninger fra teorien om kjeglesnitt:

Kjeglesnitt med *x* og *z* som variable kan beskrives ved den generelle formelen

$$Ax^2 + Bxz + Cz^2 + Dx + Ez + F = 0$$

hvor fortegnet av $B^2 - 4AC$ bestemmer formen på deklinasjonskurven.

$B^2 - 4AC < 0$ gir en ellipse
$B^2 - 4AC = 0$ gir en parabel
$B^2 - 4AC > 0$ gir en hyperbel

I formelen for deklinasjonskurven (7.1), har vi følgende

$$A = -1$$
$$B = 0$$
$$C = \left(k^2a^2 - b^2\right)$$

som gir

$$
\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= 0 - 4(-1)\left(k^2a^2 - b^2\right) \\
&= 4\left(k^2a^2 - b^2\right)
\end{aligned}
$$

Kurvens form blir med andre ord bestemt av fortegnet til $k^2a^2 - b^2$, som ved innsetting av de trigonometriske uttrykkene kan omskrives slik

$$
\begin{aligned}
k^2a^2 - b^2 &= \frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta}\cos^2\phi - \sin^2\phi \\
&= \cos(\phi + \delta)\cos(\phi - \delta)
\end{aligned}
$$

$\cos(\phi - \delta) > 0$ i de gitte mengdene for ϕ og δ, noe som gjør at fortegnet til leddet $\cos(\phi + \delta)$ bestemmer formen på deklinasjonskurven. Vi har da:

$$
\begin{aligned}
&\cos(\phi + \delta) < 0 \text{ når } \delta > 90° - \phi \\
&\cos(\phi + \delta) = 0 \text{ når } \delta = 90° - \phi \\
&\cos(\phi + \delta) > 0 \text{ når } \delta < 90° - \phi
\end{aligned}
$$

Dette gir følgende når det gjelder formen på deklinasjonskurven $z(x)$:

$z(x)$ er en ellipse når $\delta > 90° - \phi$
en parabel når $\delta = 90° - \phi$
en hyperbel når $\delta < 90° - \phi$

Betraktninger rundt grensetilfellet parabelen

I grensetilfellet $\delta = 90° - \phi$ hvor deklinasjonskurven blir en parabel, er nevneren i likning (7.2), $\left(k^2a^2 - b^2\right) = 0$. Null i nevner kan imidlertid unngås ved følgende omskriving:

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\tan\delta} = \frac{\cos\delta}{\sin\delta} \\
&= \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Vi har videre:

$$
\begin{aligned}
k^2 + 1 &= \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\cos^2\phi} \\
&= \frac{1}{\cos^2\phi} = \frac{1}{a^2}
\end{aligned}
$$

$\left(k^2a^2 - b^2\right) = 0$ gjør at z^2 leddet i likning (7.1) forsvinner. z kan dermed finnes med utgangspunkt i:

$$
-2ab\left(k^2 + 1\right)z + k^2b^2 - a^2 - x^2 = 0
$$

som gir oss

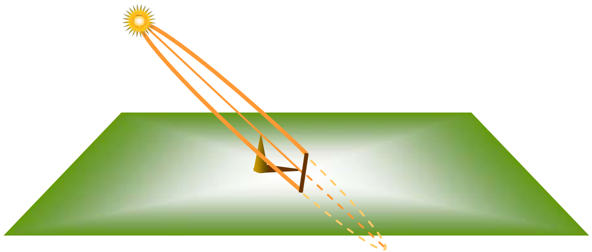
$$z = -\frac{a}{2b}\left(x^2 + 1\right) + \frac{b}{2a}$$

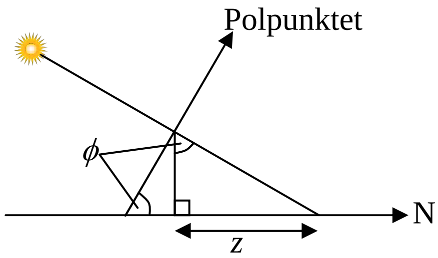
Når deklinasjonen er lik 0°

Når $\delta = 0°$ er viserens topp i planet til sirkelen sola beskriver i løpet av et døgn. I dette tilfeller får vi ikke noen kjegle, men en plan flate. Deklinasjonskurven er i dette tilfellet skjæringa mellom plan og følgelig en rett linje. Denne linja går i retning øst-vest, og har en avstand fra origo i *x*-*z* systemet gitt av:

$$z = \tan\phi$$

en sammenheng som følger av figuren til høyre.

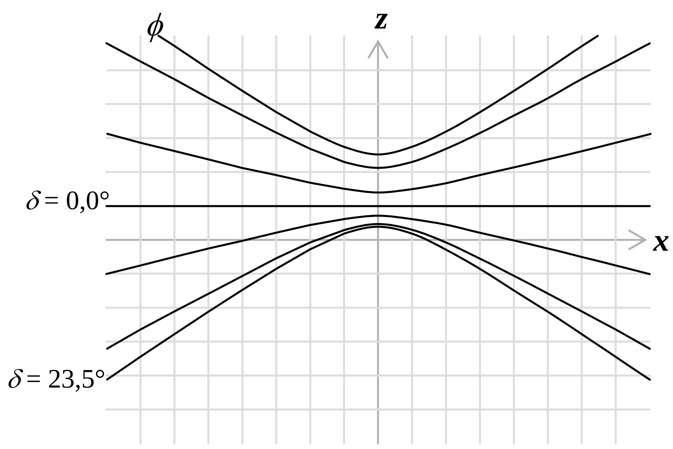




Resultatet fra kjeglesnittene

Grafen til $z(x)$ gir kurver som vist i figuren til venstre. Eksempelet er for 45° nord og kurvene er sammenfallende med resultatet fra sfærisk geometri i kapittel 6.

Fordelen med å bruke formlene fra kjeglesnittene er at vi får z som funksjon av x. På den andre side vil vi ikke få fram timelinjene automatisk.



10. Mer om…

Den som vil vite mer, kan finne mer på disse internettstedene:

Solur

Solursida: http://nordnorsk.vitensenter.no/himmel/solursida/
Britisk solurselskap: http://www.sundialsoc.org.uk/
Nordamerikansk solurselskap: http://sundials.org/
Sundials on the internet: http://www.sundials.co.uk

Analemmaen

På norsk: http://www.nvg.org/org/taf/publikas/analemma.htm
Analemma sida: http://www.analemma.com/

Tid

Time and date: http://www.timeanddate.com/norsk/
Clockworks: http://www.britannica.com/clockworks/startpage.html
A Walk through Time: http://physics.nist.gov/GenInt/Time/time.html

Eller lese mer om solur:

Bøker om/med solur

F.W. Cousins: *Sundials*, 1969, John Baker Publishers ltd
G. Jerkins, M. Bear: *Sundials and Timedials*, Tarquin
R.N Mayall og M.W. Mayall: *Sundials, their construciton and use*, 1994, Sky Publishing corp.
E. Newth: *Sola vår egen stjerne*, 1994, Cappelen
R.R.J. Rohr: *Sundials, History, Theory and Practice*, 1996, Dover publications, inc,
J. Walker og D. Brown (ed): *Make a Sundial*, 1991, British Sundial Scosiety Publ
A.E. Waugh: *Sundials – their theory and construction*, 1973, Dover publications, inc

Eller

Sfærisk geometri

W.M. Smart og R.M. Green: *Textbook on Spherical astronomy*, 1977, Cambridge Univ. Press